Министерство образования Оренбургской области
ГАПОУ «Педагогический колледж» г. Бугуруслана

Методическое пособие для обучаюшихся «Элементы дискретной математики»

Составители: Дармина М.А., Коршунова Т.А.

В методическом пособии содержатся простейшие сведения из теории множеств и отношений, дается анализ наиболее важных отношений.

Пособие может быть полезно студентам педагогических колледжей, ученикам старших классов.

2019 г.

Содержание

Введение

Курс математики представляет систему понятий, одни из которых характеризуют множества предметов (треугольник, натуральное число), а другие — отношения между элементами множеств (меньше, равно). Заметим, что первые из этих понятий определяют полностью каркас курса, тогда как вторые, хотя и занимают большое место, не образуют самостоятельной логической системы. В то же время, современная математика есть наука об отношениях в самом абстрактном смысле.

То внимание, которое уделяется в этой работе отношениям, объясняется большим значением вопросов об отношениях в курсе математики, недостаточной методической разработанностью их изложения. Теоретические сведения и упражнения подобраны с таким расчетом, чтобы они были доступны обучающимся, впервые знакомящимся с этими вопросами.

Изложение вопроса об отношениях невозможно без явного использования некоторых теоретико-множественных понятий. Поэтому совершенно естественно их включение в рассматриваемый круг вопросов.

Изложение вопроса об отношениях невозможно без явного использования некоторых теоретико-множественных понятий. Поэтому совершенно естественно их включение в рассматриваемый круг вопросов.

Отношения в курсе математики рассматриваются преимущественно на бесконечных множествах, что вполне естественно для их многочисленных бесконечных множествах, что вполне естественно для их многочисленных приложений. Однако для понимания самих отношений и их свойств методически оправдано применение конечных множеств с небольшим числом элементов. По тем же соображениям нецелесообразно систематически рассматривать отношения на пустом и одноэлементном множествах. Применение конечных множеств дает возможность широко использовать графы как наглядную основу изучения отношений, что делает это изучение доступным и интересным.

В первом параграфе собраны простейшие сведения из теории множеств, в двух последующих параграфах излагаются необходимые вопросы об отношениях.

1. Множества и высказывания

1.1. Множество

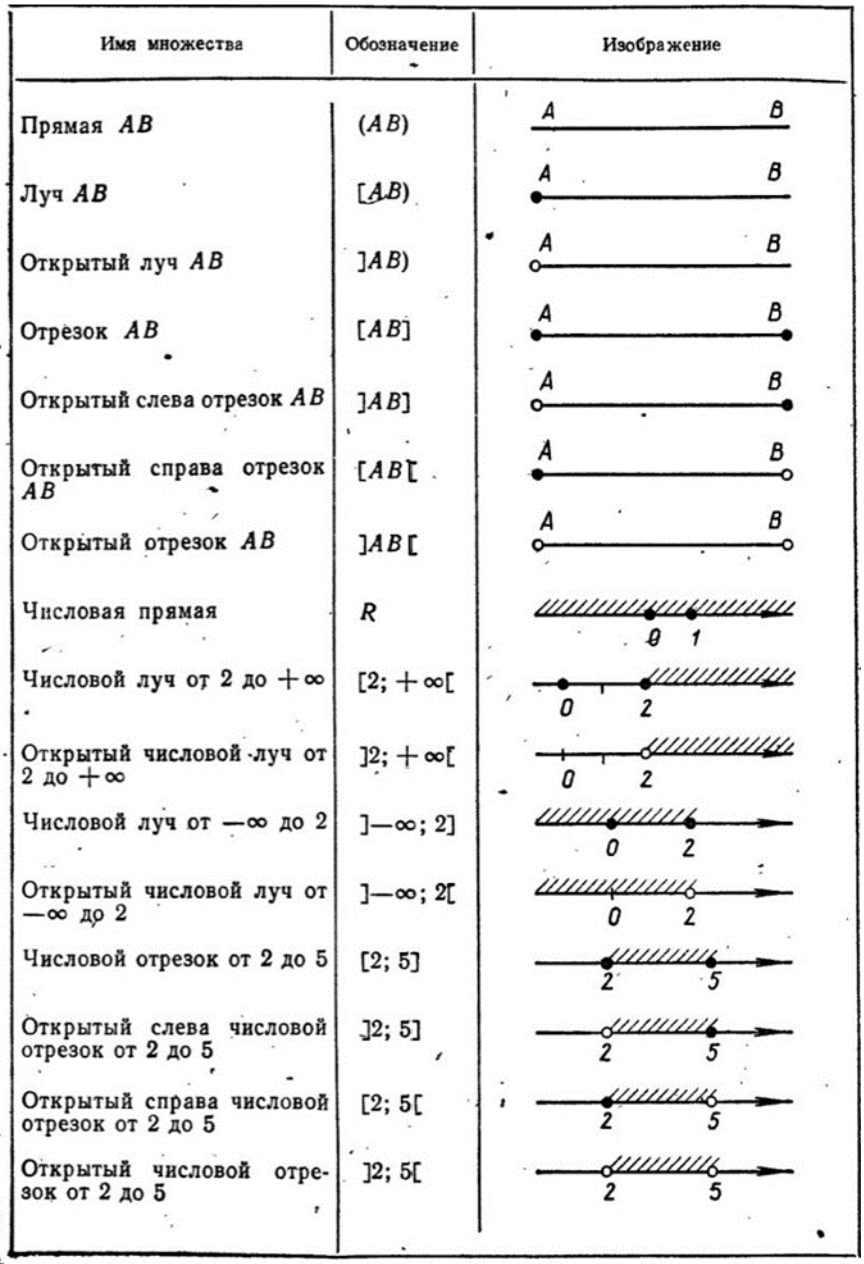
Множество — основное математическое понятие. В обыденной жизни его смысл выражается словами: совокупность, набор, класс, коллекция, команда, экипаж, букет, стадо, стая, табун и др. Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а также с помощью фигурных скобок, внутри которых перечисляют все предметы, составляющие множество. Эти предметы называют элементами множества. Например, запись M={1;3;5;7;9} означает, что M — то же самое множество, что и множество, состоящее из чисел 1, 3, 5, 7, 9. Это множество можно записать иначе, изменив порядок расположения элементов в скобках: M ={9;7;5;3;1}, M = {l; 9; 5; 7; 3}.

В записи множества с помощью фигурных скобок отражено его основное содержание: точно указано, какие предметы являются его элементами и какие не являются. Так, число 3 — элемент множества M. Пишут: $3\in$ M. Число 4 не является элементом M. Пишут: $4 \notin$ M, или ($4\notin \overline{\mathrm{M}}$). Каждый предмет, входящий в множество, указывается в фигурных скобках лишь один раз.

Пусть во множестве M содержится 5 элементов. Эго обозначают так: |M| = 5. Можно составить множество, в котором будет любое число элементов, например: 85648, 100, 2, и даже 0. Множество, в котором нуль элементов, т. е. не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством. Для его обозначения применяют знак $\emptyset$, так что $|\emptyset|= 0$. Обратим внимание на то, что число элементов множества $\{\emptyset\}$ равно 1, так как это множество состоит из одного элемента и этим элементом является пустое множество. Вообще, элементами множества могут быть предметы любой природы.

Из некоторых элементов множества M можно составить новое множество, например, P: P={3;5}.

Оно характеризуется тем, что каждый его элемент принадлежит M. В таком случае говорят, что P есть подмножество M, и пишут: P $\subset$ M. Само множество M является своим подмножеством, так как каждый элемент M принадлежит множеству M. Пустое множество также является подмножеством M. Можно доказать, что если некоторое множество содержит n элементов, то оно имеет 2^n подмножеств. Значит, множество M имеет 32 подмножества (2^5 = 32), среди которых одно пустое множество; пять одноэлементных, десять двухэлементных, десять трехэлементных, пять четырехэлементных множеств и еще одно — само множество.



Имя множества	Обозначение	Изображение
Прямая *AB*	(*AB*)	
Луч *AB*	[*AB*)	
Открытый луч *AB*	]*AB*)	
Отрезок *AB*	[*AB*]	
Открытый слева отрезок *AB*	]*AB*]	
Открытый справа отрезок *AB*	[*AB*[	
Открытый отрезок *AB*	]*AB*[	
Числовая прямая	*R*	
Числовой луч от 2 до $+\infty$	[2; $+\infty$[	
Открытый числовой луч от 2 до $+\infty$	]2; $+\infty$[	
Числовой луч от $-\infty$ до 2	]$-\infty$; 2]	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до 2	]$-\infty$; 2[	
Числовой отрезок от 2 до 5	[2; 5]	
Открытый слева числовой отрезок от 2 до 5	]2; 5]	
Открытый справа числовой отрезок от 2 до 5	[2; 5[	
Открытый числовой отрезок от 2 до 5	]2; 5[	

Рис. 1

Некоторые множества в курсе математики особенно важны, поэтому для них вводятся стандартные обозначения: N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел. Кроме того, с помощью специальных знаков обозначаются другие числовые и точечные множества. Так, например, прямая AB имеет обозначение (AB), отрезок с концами A и B — [AB], луч AB – [AB). Рассматривают также открытый луч и открытый отрезок, открытый с одного конца отрезок, а также числовые отрезки, закрытые и открытые (рис. 1).-

Над множествами, так же как и над числами, производят некоторые операции. Их называют пересечение, объединение, дополнение.

Возьмем множество X, состоящее из букв а, б, в, г, д, и множество Y, состоящее из букв г, д, е, ж:

X={,б,в,г,д},   Y={г,д,е,ж}

Эти множества имеют общие элементы: г и д. Множество общих элементов X и Y называют пересечением множеств X и Y и обозначают с помощью знака ∩ : X∩Y={г,д}

Множества M и X не имеют ни одного общего элемента, т. е. множество их общих элементов пустое. Поэтому пересечением множеств M и X является пустое множество: $M \cap X = \emptyset$.

Пересечение множеств M и P есть множество P, а пересечение M и M есть множество M:

$M \cap P = P$, $M \cap M = M$.

Если из элементов множеств X и Y составить новое множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее других элементов, то получится объединение множеств X и Y, которое обозначают с помощью знака $\cup$: $X \cup Y = \{а;б;в;г;д;е;ж\}$.

Объединение множеств M и X не является пустым: $M \cup X = \{1;3;5;7;9;а;б;в;г;д\}$.

Объединение множеств M и P есть множество M. Это же множество является объединением множеств M и M.

Пересечение и объединение множеств выполняются для любой пары множеств. Третья операция — дополнение — имеет смысл не для всех множеств, а лишь для тех, когда второе является подмножеством первого. Множество P является подмножеством M. Составим новое множество из тех элементов M, которые не вошли в P. Это новое множество называют дополнением P до M и обозначают знаком $\overline{P}$: $\overline{P} = \{1;7;9\}$.

Чтобы такие обозначения, как $\overline{P}$, были понятными, необходимо указать, какое множество имеет своим подмножеством P. Заметим, что дополнение множества M до множества P не имеет смысла, так как M не является подмножеством P. Дополнение множества M до M есть пустое множество, а дополнение пустого множества до M есть M: $\overline{M} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = M$.

Можно рассматривать пересечение и объединение трех и более множеств. Под пересечением и объединением трех множеств A, B и C понимают соответственно множества $(A \cap B) \cap C$ и $(A \cup B) \cup C$:

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C,$$
$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C.$$

Пересечение и объединение множеств обладают переместительным и сочетательным свойствами. Кроме того, они обладают двумя распределительными свойствами: пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения. Распределительное свойство объединения относительно пересечения проиллюстрировано на рисунке 2 с помощью кругов Эйлера.

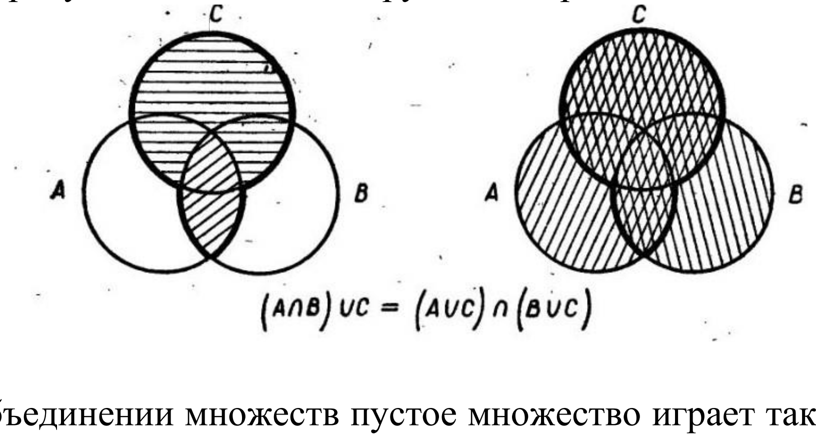


рис.2

При пересечении и объединении множеств пустое множество играет такую же роль, как нуль при сложении и единица при умножении. Так, пересечение пустого множества с множеством X равно пустому множеству, а объединение пустого множества с множеством X равно множеству X:

$\emptyset \cap X = \emptyset$, $\emptyset \cup X = X$.

Аналогия между операциями над множествами и над числами не всегда имеет место. Так, например, при сложении двух одинаковых чисел, отличных от нуля, получается новое число: 3+3=6,6≠3.

При объединении же двух равных множеств получается то же самое множество: X∪X=X.

Число элементов объединения двух множеств с пустым пересечением равно сумме чисел элементов этих множеств. Так, в объединении множеств P и X содержится 7 элементов. Если же множества - пересекаются, то число элементов объединения находится сложнее. Множество X состоит из 5 элементов, а множество Y — из 4. В объединении же X и Y содержится 7 элементов, а не 9. Число 9 получается при сложении чисел 5 и 4. Но в это число дважды включается число элементов пересечения. Чтобы получить правильный результат, надо к числу элементов X-прибавить число элементов Y и из суммы вычесть число элементов пересечения. Получается формула, которая годится для любого случая:

|X ∪ Y| = |X|+ |Y| — | X∩У|.

1. Прочитайте записи: $\mathrm{A} = \{5; 10; 15\}, \{8\}, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}, |X| = 12,$ $\bar{M} = \{a, b, c\}, |\bar{X}| = 40, M \subset K, 3 \in N, \frac{1}{2} \in Z, -8 \in N, \overline{A \cap B}, \overline{\bar{X} \cap \bar{Y}}.$

2. Принадлежит ли число:

а) 2 множеству]2;10]; б) $-\frac{1}{4}$ множеству $[-\frac{1}{2}; 0]$

в) 0 множеству $] -\infty; 0]$; г) 5 множеству]6;+ ∞ [;

д) 72 множеству Q; е) $5\frac{1}{3}$ множеству Z.

3. M= $\{12,20,35\}, N = \{12,20,48,60,90\}, K = \{48,60,90\}$. Запишите с помощью фигурных скобок или знака ∅: а) пересечение M и N; б) пересечение M и K; в) пересечение N и K; г) объединение M и N; д) объединение M н K; е) объединение N и K; ж) дополнение K до N; з) дополнение ∅ до M.

рис.3

4. С помощью фигурных скобок. (рис. 3) запишите множество:

а) $X \cup V$; б) $Y \cup V$; в) $X \cap Y$; г) $V \cap Y$; д) $X \cup Y \cup V$; е) $X \cap Y \cap V$.

5. С помощью фигурных скобок (рис. 3) запишите множество:

а) $(X \cup Y) \cap V$; б)$(Y \cap V) \cup X$; в)$(X \cup Y) \cap (X \cup V)$; г) $(V \cap X) \cup (X \cap Y)$.

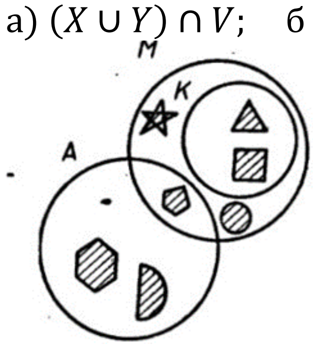


рис.4

6. Из каких элементов (рис.4) состоит: а) дополнение K до M;

б) дополнение пересечения М и А до М;
в) объединение К и М;
г) пересечение К и М?

1.2. Высказывание

Одни повествовательные предложения выражают *истину*, другие — *ложь*, а третьи — ни то, ни другое. Те предложения, которые выражают истину или ложь, представляют *высказывания*. Например, предложения «8 — четное число», «3 меньше 9», «2 плюс 4 равно 6» выражают высказывания, и притом истинные. Предложения «8 — простое число», «5 кратно 2», «7 минус 3 равно 1» также выражают высказывания, но ложные. Высказывание не может выражаться ни вопросительным, ни побудительным предложениями.

Высказывания обычно обозначают прописными латинскими буквами. Обозначим высказывание «8 — четное число» буквой А, «8 — простое число» буквой В. Так как А — истинное высказывание, а В — ложное, то пишут: А = И, В = Л.

Из одних высказываний можно получить другие с помощью частицы «не» или слов «неверно, что»: Так, из высказывания А получается высказывание: «Неверно, что 8 — четное число». Его называют отрицанием А и обозначают $\overline{A}$. Обозначение $\overline{A}$ читают: «Неверно, что А», или «Не А». Для отрицания любого высказывания характерно, что оно истинно тогда, когда ложно само высказывание, и ложно тогда, когда само высказывание истинно. Эго свойство отрицания отражается в таблице истинности:

А	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Заметим, что отрицанием высказывания «2 меньше 3» не является высказывание «2 больше 3» или «3 больше 2». Им является высказывание «Неверно, что 2 меньше 3», или в другом виде: «2 не меньше 3»,«2 больше или равно 3».

Высказывание ($\overline{\overline{A}}$),которое записывают $\overline{\overline{A}}$, является отрицанием высказывания $\overline{A}$ или отрицанием отрицания А. Его значение истинности совпадает со значением истинности А:

А	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
И	Л	И
Л	И	Л

Таким образом, при любом значении А верно равенство $\overline{\overline{A}}$ = А.

Новое высказывание можно составить и из двух заданных высказываний с помощью связок «и», «или», «если, то». Этими связками выражаются операции над высказываниями.

Из двух истинных высказываний $5<7$, $7<9$ получаем новое истинное высказывание $5<7$ и $7<9$, которое записывают короче в виде двойного неравенства: $5<7<9$. Если же хотя бы одно из данных высказываний ложно, то высказывание, составленное с помощью связки «и», также считается ложным, что показано в таблице истинности:

A	B	A и B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Из двух истинных высказываний «Люди получают высшее образование, если они заканчивают университет» и «Люди получают высшее образование, если они заканчивают академию» можно составить с помощью связки «или» новое истинное высказывание: «Люди получают высшее образование, если они заканчивают университет или академию». Вообще высказывание, составленное с помощью связки «или», считается истинным тогда, когда истинно хотя бы одно из составляющих его высказываний. Если же оба высказывания ложны, то и составное высказывание ложно:

A	B	A или B
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Высказывание «Если 783 делится на 261, то 783 делится на 87» составлено с помощью связки «если, то» из двух высказываний: «783 делится на 261» и «783 делится на 87». Эти высказывания истинны, так как 783 : 261 = 3 и 783 : 87 = 9. Истинным считают и составное высказывание: «Если 783 делится на 261, то 783 делится на 87». Вообще высказывание, составленное с помощью связки «если, то», считается ложным лишь в одном случае, когда первое из высказываний истинно, а второе ложно:

А	В	если А, то В
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Операции составления высказываний с помощью связок «и» и «или» обладают переместительным и сочетательным свойствами. Кроме того, они имеют одна по отношению к другой распределительное свойство. Распределительные свойства выражаются равенствами:

$$(X \text{ и } Y) \text{ или } Z = (X \text{ или } Z) \text{ и } (Y \text{ или } Z)$$
$$(X \text{ или } Y) \text{ и } Z = (X \text{ и } Z) \text{ или } (Y \text{ и } Z)$$

Напишем еще четыре очевидных равенства, верных при любых значениях переменной. Они характеризуют свойства значений И и Л:

Х и И = Х, Х или И = И,
Х и Л = Л, Х или Л = Х.

Высказывания $3 < 4$, $2 < 4$, $10 < 4$, $-1 < 4$ имеют одну н ту же форму. Ее можно представить с помощью предложения, содержащего переменную: $x<4$. Это предложение не выражает высказывания, так как о нем нельзя сказать, истинно оно или ложно, пока вместо х не подставлено какое-нибудь его значение. Такие предложения называют *предложениями с переменной* (открытыми высказываниями или высказывательными формами). Если задают предложение с переменной, то указывают множество значений переменной. При одних значениях переменной получается истинное высказывание, а при других — ложное. *Множество тех значений переменной, при которых получаются истинные высказывания, называют областью истинности предложения с переменной.* Например, область истинности предложения с переменной $x < 6$ на множестве натуральных чисел есть множество $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Еще пример: если А= {а; б; в; г; д} и В ={в; г; д; е; ж}, то область истинности предложения с переменной $y \in A \cap B$ есть множество {в; г; д}.

С помощью слов «неверно, что» можно образовывать отрицания предложений с переменной. С помощью связок «и», «или», «если, то» можно составлять более сложные предложения с переменными. Примерами могут служить неравенства: $y \leq 4, 3 < x < 8$.

Предложения с переменными используются при задании некоторых множеств с помощью указания характеристических свойств их элементов. Например, если А — множество четных чисел, то А записывают так: А = $\{n|n - \text{четное число}\}$; если В — множество чисел, больших 3 и меньших 10, то В можно записать следующим образом: В = $\{x|\ 3 < x < 10\}$.

С помощью предложений с переменной можно определить пересечение, объединение и дополнение множеств следующим образом:

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ и } x \in B\},$$
$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ или } x \in B\},$$
$$B \subset A, \bar{B} = \{x|x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

7. Верно ли высказывание:

а) $\overline{-3 \in N}$; в) $\overline{7 \leq 7}$ г) $\overline{1 \leq 3 \leq 3}$

б) $\overline{205 \vdots 5}$ г) $\overline{8 \geq 10}$ е) $\overline{4 < 8 \leq 5}$?

8. А – множество точек треугольника (рис.7) и В – множество точек четырехугольника. Верно ли высказывание:

а) $C \in A$ и $C \in B$; б) $K \in B$ и $K \in A$; в) $S \in B$ или $S \in A$ г) $\overline{S \in A}$ и $S \in B$?

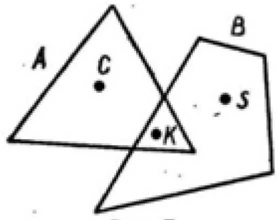


Рис. 7

9. Известно, что А=И, В=И, Х=Л,Y=Л. Найдите значение высказывания:

а) A или $\overline{X}$; б) $\overline{A}$ и B; в) Y или B; г) если $\overline{X}$, то $\overline{Y}$; д) $\overline{Y}$ и $\overline{A}$;

е) $\overline{\overline{X}и\overline{A}}$; ж) $\overline{\overline{B}\text{ или } Y}$; з) если А, то Х.

1.3. Граф

Почтальон обслуживает одну улицу. Чтобы доставить по некоторому адресу корреспонденцию, он должен знать два числа: первое — номер дома; второе — номер квартиры. Например, числа 15 и 140 означают дом 15, квартира 140. Если числа поменять местами, то получится другой адрес: дом 140, квартира 15. Значит, почтальон должен знать не просто два числа, а пару чисел, т. е. два числа, заданные в определенном порядке. Любая пара элементов обозначается с помощью круглых скобок. Так, пара чисел 15 и 140 есть (15; 140), а пара чисел 140 и 15 есть (140; 15). Пары (15; 140) и (140; 15) не равны, так как у них различны первые элементы. Две пары считаются равными тогда и только тогда, когда у них равны как первые, так и вторые элементы. Элементы пары могут быть и равными, например: (5;5), (x;x).

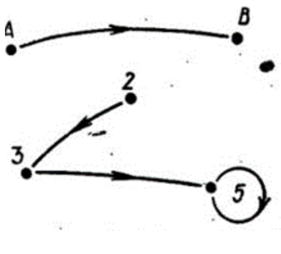


рис. 8

На рисунке 8 показано изображение пары точек (А; В). Стрелка выходит из первого элемента пары и входит во второй. Таким способом наглядно изображают не только пары элементов, но и истинные высказывания о них. Так, на том же рисунке изображено три высказывания: «2 меньше или равно 3», «3 меньше или равно 5» и «5 меньше или равно 5». Такого вида рисунки называют графами.

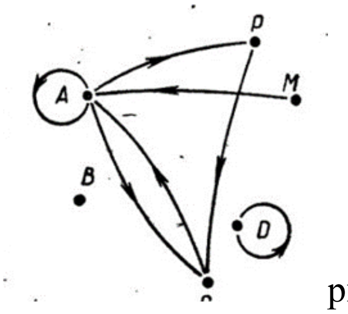


рис. 9.

На рисунке 9 изображен еще один граф с вершинами A, B, C, M, D и P. Стрелку, соединяющую две различные или совпадающие вершины графа, называют ребром. Этот граф имеет 7 ребер: AP, PC, CA, AC, MA, AA и DD. Ребра вида AA и DD называют петлями. Ребра AP и PC образуют цепь APC, так как первое ребро выходит из точки A и входит в точку P, а второе выходит из точки P и входит в точку C. На графе можно найти и более длинные цепи, например, MACAP, CAAC. Некоторые цепи на графе могут иметь замыкающее ребро. Так, цепь APC имеет замыкающее ребро AC. Начало замыкающего ребра совпадает с началом цепи, а конец — с ее концом.

С помощью графов решаются многие задачи, в том числе задачи на вычерчивание фигур «одним росчерком». Пусть, например, требуется начертить конверт (рис. 10), не отрывая карандаша бумаги и не проводя по одному отрезку дважды.

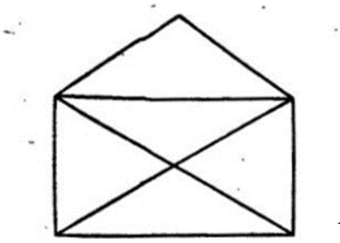


рис. 10

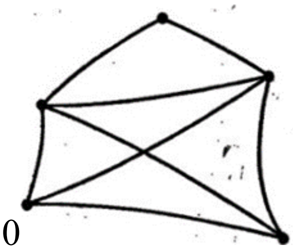


рис. 11

Чтобы уточнить задание, надо на эту фигуру наложить неориентированный граф (рис. 11), т. е. выделить точки, которые будут вершинами графа. Решение задачи состоит в выборе направления на ребрах с таким расчетом, чтобы получилась цепь, содержащая все ребра. Можно доказать, что задача разрешима, если на неориентированном графе имеется нуль или две вершины с нечетным числом ребер. В нашем случае таких вершин две. Значит, предложенную задачу можно решить.

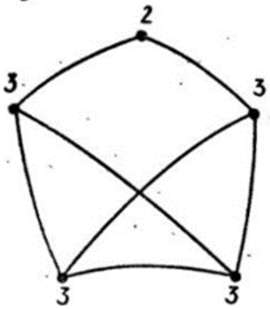


рис.12

На рисунке 12 у каждой вершины неориентированного графа указано число ребер, принадлежащих этой вершине. Так как нечетных чисел четыре, то одним росчерком этот граф начертить нельзя.

10. Составьте все пары из элементов множества {а; б; в; г}.

11. Напишите такие пары элементов множества {2; 4; 6; 8}, в которых первый элемент больше второго.

12. Изобразите с помощью одного графа пары (m;k), (p;m), (k;m), (p;p).

13. Каждая стрелка на графе должна означать «кратно». Начертите такой граф, на котором были бы изображены высказывания: «8 кратно 2», «8 кратно 4», «8 кратно 1», «4 кратно 2», «2 кратно 1», «4 кратно 4», «2 кратно 2».

14. Сколько на графе (рис. 13) вершин и сколько ребер? Найдите на этом графе все цепи, состоящие из двух ребер, и их замыкающие. Есть ли на графе более длинные цепи?

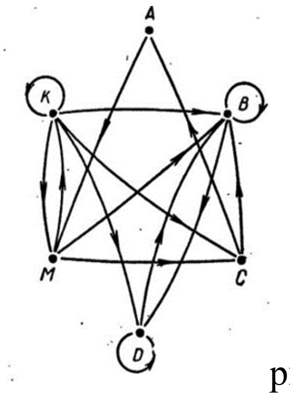


рис. 13.

15. На рисунке 14 изображены три неориентированных графа. Какие из них можно начертить одним росчерком?

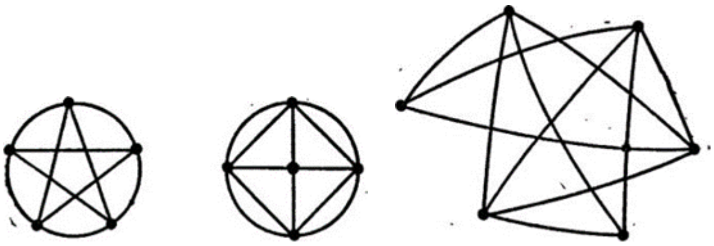


рис.14.

4. Декартово произведение

З а д а ч а. Сколько открытых двухбуквенных слогов можно написать, используя буквы а, б, в, г, е, и, о?

Открытый слог должен начинаться с согласной буквы, а оканчиваться гласной. Значит, для начала слога надо использовать буквы б, в и г, а для конца — а, е, и, о. Теперь требуется из элементов двух множеств {б; в; г} и {а; е; и; о} составить все пары так, чтобы первый элемент пары принадлежал первому множеству, а второй — второму. Получается множество пар {(б; а), (б; е), (б; и), (б; о), (в; а), (в; е), (в; и), (в; о), (г; а), (г; е), (г; и), (г;о)}. Это множество пар называется декартовым произведением множеств {б; в; г} и {а; е; и; о}. Пусть{б; в; г} = А и {а; е; и; о}=В . Декартово произведение А и В обозначают так: А х В. Декартово произведение двух множеств можно определить следующим образом: $X \times Y = \{(x; y) | x \in X$ и $y \in Y\}$.

Отметим, что переместительным свойством декартово произведение не обладает. Действительно, в рассмотренной задаче пара (б; а) принадлежит множеству А х В, но не принадлежит множеству В х А, так как это множество состоит из пар, первые элементы которых берутся из множества В.

Чтобы пересчитать элементы декартова произведения, его целесообразно записать в виде прямоугольной таблицы. Запишем таким образом декартово произведение множеств А и В:

(б;а)	(б;е)	(б;и)	(б;о)
(в;а)	(в;е)	(в;и)	(в;о)
(г;а)	(г;е)	(г;и)	(г;о)

В полученной прямоугольной таблице содержится столько строк, сколько элементов в первом множестве, и столько столбцов, сколько элементов во втором множестве. Пусть в множестве А содержится *а* элементов, а в множестве В - *в* элементов. Тогда в таблице будет *ав* элементов. Значит, при любых значениях переменных X и Y верно равенство: |X x Y|=|X| · |Y|.

В частности, оно верно и тогда, когда X или Y — пустое множество.

16. М = {1; 2; 3}, К = {х; у}. Запишите с помощью фигурных скобок множество: а) М х К; б) К х М; в) М х М; К х К.

17. Запишите в виде прямоугольной таблицы множества С х Р и Р х С, если С = {7; 6; 5; 4; 3, }, Р = {4;3;2;1}.

18. Известно, что X х А ={ (а;1); (а; 5); (а; 8); (т; 1); (т; 5); (т; 8); (к; 1); (к; 5); (к;8) }. Найдите множества X и А.

19. Р = {4; 0; 6}. Запишите с помощью фигурных скобок Р х Р. Изобразите с помощью графа те пары множества Р х Р, в которых: а) первый элемент больше второго; б) первый элемент меньше второго; в) первый элемент меньше или равен второму; г) первый элемент равен второму.

2. Отношения

2.1. Отношение между элементами множества

На рисунке 15 изображены сестры Анна Ивановна и Вера Ивановна с сыновьями Петей и Юрой. Между этими людьми существуют различные родственные отношения. Рассмотрим некоторые из них.

Петя сын Анны Ивановны. В этом же отношении «быть сыном» находится Юра с Верой Ивановной, так как высказывание «Юра — сын Веры Ивановны» истинно. В отношении «быть сыном» не находятся Вера Ивановна и Анна Ивановна, так как высказывание «Вера Ивановна — сын Анны Ивановны» ложно. Таким образом, каждое отношение соединяет некоторые элементы в пары. Выпишем все пары элементов, находящихся в отношении «быть сыном». Таких пар две: (Петя; Анна Ивановна) и (Юра; Вера Ивановна). Эти пары можно изобразить с помощью графа (рис. 16). Такой граф называют графом отношения «быть сыном».

Анна Ивановна — тетя Юры. В этом же отношении «быть тетей» находятся еще лишь Вера Ивановна и Петя. Граф отношения «быть тетей» показан на рисунке 17.

В отношении «быть сестрой или матерью» находятся элементы четырех пар: (А. И.; В. И.), (В. И.; А. И.), (А. И.; П.), (В. И.; Ю.). Граф этого отношения представлен на рисунке 18.

Таким же образом можно построить графы отношений «быть двоюродным братом», «быть племянником» и др.

Рис.15

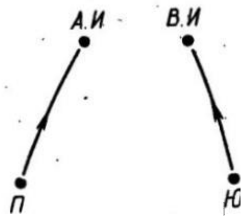


Рис. 16

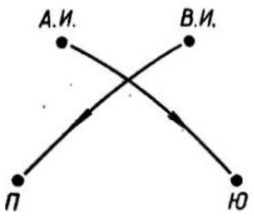


Рис. 17

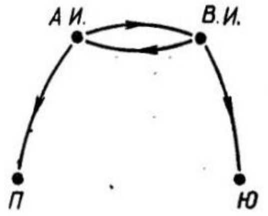


Рис. 18

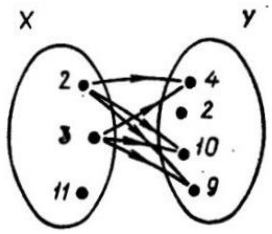


рис.19

Рассмотрим отношение «меньше» между элементами множества X и множества Y (рис. 19). Сравним каждый элемент из X с каждым элементом из Y. Начнем с числа 2: $2 < 4$ – И, $2 < 2$ - Л, $2 < 10$ - И, $2 < 9$ - И. Значит, 2 находится в отношении «меньше» с каждым из чисел: 4,10,9. Далее устанавливаем, что число 3 находится в отношении «меньше» с числами 4, 10 и 9, а число 11 не находится в этом отношении ни с одним элементом множества Y. Если все истинные высказывания об элементах, находящихся в отношении «меньше», изобразить с помощью стрелок, то получится граф отношения «меньше» между элементами множеств X и Y (см. рис. 19). Это отношение полностью характеризуется своим графом. Его можно охарактеризовать и иначе, если написать множество пар, изображенных на графе:

$\{(2; 4), (2; 10), (2; 9), (3; 4), (3; 10), (3; 9)\}$

Вот почему иногда говорят, что отношение между элементами двух множеств есть множество пар, которое представляет подмножество декартова произведения множеств. Если обозначить отношение «меньше» знаком R_1, то можно записать:

$R_1 = \{ (2; 4), (2; 10), (2; 9), (3; 4), (3; 10), (3; 9)\}$

Теперь высказывание «2 находится в отношении R_1 с числом 4» (часто пишут: $2R_14$) можно заменить другим высказыванием: «Пара (2; 4) принадлежит отношению R_1 »: $(2; 4) \in R_1$.

Выделим еще одно подмножество R_2 декартова произведения X и Y:

$R_2 = \{ (2; 4), (2; 2), (2; 10), (3; 9)\}$

Это подмножество выражает отношение «быть делителем» между элементами множеств X и Y.

Одним может показаться, что между элементами множеств X и Y существует не так уж много отношений, а другим — что их очень много. Правомерен вопрос о числе всех таких отношений. Если вспомнить, что любое отношение между элементами X и Y полностью характеризуется подмножеством декартова произведения X и Y, то можно понять, что различных отношений столько, сколько подмножеств в этом декартовом произведении. В декартовом произведении X и Y содержится 12 элементов (3·4=12), значит, оно имеет 2^{12} подмножеств. Так как 2^{12} равно 4096, то между элементами множеств X и Y существует 4096 отношений, включая пустое отношение, в котором не содержится ни одной пары.

Часто рассматривают отношение между элементами равных множеств, т. е. между элементами одного и того же множества. Такой случай имел место, когда мы рассматривали родственные отношения на множестве {Анна Ивановна; Вера Ивановна; Петя; Юра}. При изображении графа отношения между элементами равных множеств обычно каждый элемент изображают лишь одной точкой, а границу множества не показывают.

20. P = {7; 20; 16; 35), C={16; 21; 28}, R — отношение «меньше или равно» между элементами множеств P и C. Найдите:

а) с какими элементами находится число 16 в отношении R;

б) какие числа находятся в отношении R с числом 28?

21. M={а; в; д; ж ;и, }, N ={б; г;, е}, R — отношение «непосредственно следовать в порядке алфавита» между элементами M и M. Какие из пар (в; б), (а; б), (д; г) и (и; е) принадлежат R?

22. Запишите с помощью фигурных скобок все пары элементов, находящихся в отношении «кратно» между элементами множеств {8; 9; 10; 11} и {4: 5; 8; 11}.

23. На рисунке 20 проведите стрелки так, чтобы получился граф отношения «такой же формы» между элементами множеств M и A.

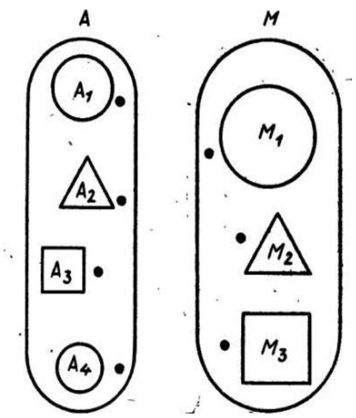


Рис.20

24. Начертите граф отношения: а) «больше в 10 раз» между элементами множеств {30; 50; 70; 90} и {3; 5; 7;9}; б) «меньше на 5» между элементами множеств { 0; 5; 11; 9} и {0; 5 ; 14; 16}.

25. Начертите граф отношения «принадлежать» между множеством точек {A; B; C; K; M} и множеством отрезков {AB; BC; AM} (рис. 21).

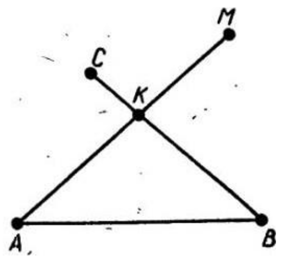


Рис.21

26. Начертите графы отношений: а) «меньше», б) «равно», в) «меньше или равно» на множестве {4; 6; 8; 10}.

27. На множестве {l; 3; 5; 7} начертите граф отношения: а) «больше»; б) «равно»; в) «больше или равно».

28. Изобразите с помощью графов отношения «меньше на 2» и «больше на 2» на множестве {0; 2; 4; 6; 8}.

6. Обратное отношение

На рисунке 22 изображено отношение «кратно» между элементами множеств M и N. Это отношение, которое обозначено буквой R , можно задать с помощью фигурных скобок: R = {(8; 4), (8; 2), (9; 3), (6; 3), (6; 2) }

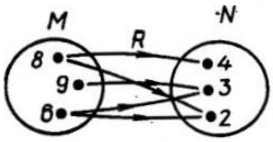


Рис. 22

Если изменить направление каждой стрелки на рисунке 22, то получится другое отношение — отношение между элементами множеств N и M. Его называют отношением, *обратным* отношению R, и обозначают знаком R^{-1} (читают «эр в минус первой степени»). Запишем отношение R^{-1} с помощью фигурных скобок. Для этого достаточно в каждой паре отношения R переставить элементы: R^{-1} ={ (4; 8), (2; 8), (3; 9), (3; 6),(2; 6)}.

Отношение R^{-1} между элементами множеств Y и X называется обратным отношению R между элементами множеств X и Y, если элемент из Y находится с элементом из X в отношении R^{-1} тогда и только , тогда, когда те же элементы из X и Y находятся в отношении R.

Если в каждой паре отношения R^{-1} переставить элементы, то получится отношение R. Значит, отношение R также обратно отношению R^{-1} :

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

Например, отношение «больше» на множестве чисел обратно отношению «меньше», а отношение «меньше» обратно отношению «больше». Эту связь отношений «меньше» и «больше» можно выразить так:

если $a < b$, то $b > a$

если $a > b$, то $b < a$

29. На рисунке 23 изображены отношения R_1 и R_2

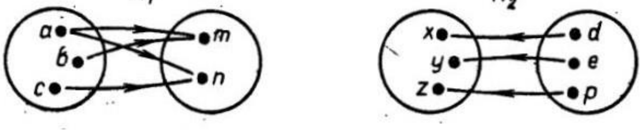


Рис. 23

Запишите эти отношения и им обратные с помощью фигурных скобок.

30. R есть отношение «быть делителем» на множестве Z. Какие из пар (2; 8), (3; 7), (5; 100), (69; 30) и (11; 11) принадлежат: а) R; б) R^{-1}?
31. На множестве Z заданы отношения «равно» и «кратно». Назовите обратные им отношения.
32. На множестве всех людей заданы отношения «быть сыном», «быть братом», «быть матерью», «быть другом». Назовите обратные им отношения.
33. Отношение T есть параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. Чем является отношение T^{-1}?
34. Буквой R обозначена центральная симметрия, при которой точка X переходит в точку Y. Верно ли, что отношение R обратно самому себе, т. е. R^{-1} =R?

3. Свойства отношений

3.1. Рефлексивность и симметричность

Рассмотрим свойство рефлексивности. Возьмем отношение «равно» на множестве чисел. Этому отношению принадлежат все пары вида (x; x) т. е. пары в которых первый элемент равен второму. Например , (3 ; 3) , (2,5; 2,5). Это свойство отношения «равно» называется рефлексивностью.

Свойством рефлексивности обладает не только отношение «равно», но и многие другие отношения. *Отношение R на множестве M обладает свойством рефлексивности, если каждый элемент M находится в отношении R с самим собой.* Например, отношение «быть делителем» на множестве N обладает свойством рефлексивности, так как каждое число из N является делителем самого себя. Отношение «противоположно» на множестве Z не обладает свойством рефлексивности, так как высказывание «Каждое число противоположно самому себе» ложно.

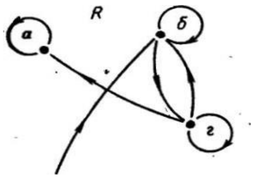


Рис.24

Пусть отношение R на множестве {а; б; г} обладает свойством рефлексивности. Это значит, что каждый элемент множества {а; б; г}находится в отношении R с самим собой. Другими словами, каждая пара с одинаковыми элементами принадлежит R. На графе отношения эти пары изображаются петлями Значит, рефлексивность отношения R на его графе отражается так: в каждой вершине графа есть петля. Таким образом, по графу легко определить , обладает или не обладает отношение свойством рефлексивности: если в каждой вершине графа есть петля, то отношение рефлексивно; если найдется хотя бы одна вершина без петли, то отношение не является рефлексивным.

В частности, отношение на пустом множестве обладает свойством рефлексивности, так как на графе не найдется ни одной вершины (вершин вообще нет) без петли.

Теперь рассмотрим свойство симметричности. Возьмем отношение равенства на множестве фигур, изображенных на рисунке 25.

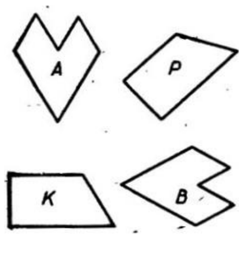


Рис.25

Если фигура А равна фигуре В, то фигура В равна фигуре А. Это свойство отношения равенства называется симметричностью.

Свойством симметричности обладают многие другие отношения.

Свойство симметричности отношения R на множестве М заключается в следующем: если элемент х из М находится в отношении R с элементом у, то и элемент у находится в этом отношении с элементом х. Например, отношение «противоположно» на множестве Z обладает свойством симметричности, так как для любого целого числа *a* верно предложение: «Если а противоположно b, то b противоположно а». Отношение «меньше на 3» не обладает свойством симметричности. Например, высказывание «Если число 2 меньше числа 5 на 3, то число 5 меньше числа 2 на 3» ложно.

Пусть отношение Q на множестве {д; е; ж; к} симметрично. Это значит, что если некоторый элемент множества {д; е; ж; к} находится в отношении Q с другим элементом, то и другой элемент находится с этим элементом в отношении Q. Другими словами, вместе с каждой парой элементов, принадлежащих отношению Q, этому отношению принадлежит пара элементов, взятых в обратном порядке. На графе эти две пары изображаются ребрами, соединяющими одни и те же вершины, но имеющими противоположные направления. Говорят, что эти две вершины соединяются двумя ребрами или двойным ребром. Значит, симметричность отношения Q на его графе отражается следующим образом. Если на графе есть ребро, соединяющее две различные вершины, то это ребро двойное. Тогда лишь петли могут быть одинарными ребрами. Поэтому на графе не должно быть одинарных ребер, кроме петель. Значит, если на графе отношения, кроме петель, нет одинарных ребер, то отношение обладает свойством симметричности. Если же на графе найдется, кроме петель, хотя бы одно одинарное ребро, то отношение свойством симметричности не обладает. В частности, на графе отношения равенства, кроме петель, нет никаких других ребер. Поэтому отношение равенства обладает свойством симметричности.

35. Изобразите с помощью графа отношение «больше в 5 раз» на множестве {l; 6; 5; 30; 15; 150}. Обладает ли это отношение свойством рефлексивности?

36.Изобразите отношение «меньше или равно» на множестве {1; 3; 5; 7}в виде графа. Обладает ли это отношение свойством рефлексивности?

37. Я вляется лн отношение Q на множестве {l; 2; 3; 4; 5} рефлексивным, если Q = {(1; 1); (2; 5); (5; 2); (3; 3); (4; 5); (4; 4)}

38. На рисунке 26 изображены графы четырех отношений. Какие из этих отношений симметричны?

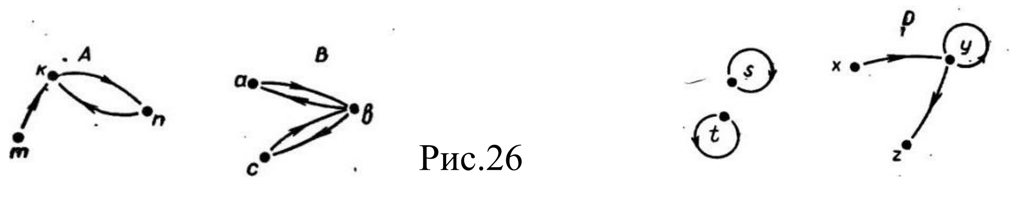


Рис.26

39. Изобразите с помощью графа отношение «не равно» на множестве {2; 4; 6; 8}. Обладает ли это отношение свойством симметричности?

40.Отношение «иметь модуль» на множестве {—2; 3; -3; 2; 4} изобразите в виде графа. Является ли это отношение симметричным?

41.Является ли отношение S на множестве {1; 3 5; 7} симметричным,если S = {(1,3); (1; 5); (5; 1); (3; 1); (7;3); (3; 7); (5;5)?

42. Обладают ли свойством рефлексивности или свойством симметричности отношения: а) «быть смежным» и «быть вертикальным» на множестве углов плоскости; б) «иметь общий конец» и «пересекаться» на множестве отрезков плоскости?

43.В семье два ребенка —мальчик и девочка. Является ли симметричным на множестве детей этой семьи отношение: а) «быть сестрой»; б) «быть братом»; в) «быть братом или сестрой»; г) «иметь ту же самую мать»?

44.В семье четверо детей: два мальчика и две девочки. Является ли симметричным на множестве детей этой семьи отношение: а) «быть сестрой»;
б) «быть братом»?

3.2. Транзитивность

Пусть задано отношение «быть старше» на множестве {Иван; Петр; Андрей; Ольга}. Если нам сообщат о том, что Иван старше Петра и Петр старше Ольги, то мы сами сделаем вывод о том, что Иван старше Ольги. При этом мы используем то свойство отношения «быть старше», которое называется транзитивностью. Этим свойством обладают и многие другие отношения.

Свойство транзитивности отношения R на множестве M заключается в следующем: *если элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, то элемент x находится в отношении R с элементом z.* Например, отношение «короче» на множестве отрезков прямой обладает свойством транзитивности, так как для любых трех отрезков АВ, СД и РК верно высказывание: «Если АВ короче CD и CD короче РК, то АВ короче РК» (рис. 27).

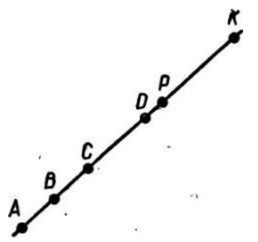


Рис. 27

Отношение «больше на 5» на множестве {20; 15; 10; 5} не обладает свойством транзитивности, так как высказывания «20 больше 15 на 5» и «15 больше 10 на 5» истинные, а высказывание «20 больше 10 на 5» ложное.

Пусть отношение R на множестве {а; в; д; ж} транзитивно. Это значит, что если некоторый элемент находится в отношении R с другим элементом, а другой - с третьим, то этот элемент находится в отношении R с третьим элементом. Другими словами, как только пары элементов первый - второй и второй - третий принадлежат R, так и пара элементов первый - третий будет принадлежать R. Отсюда следует, что ребра графа, изображающие пары элементов первый - второй и второй - третий, образуют цепь, а ребро, изображающее пару элементов первый -третий, является замыкающим этой цепи .

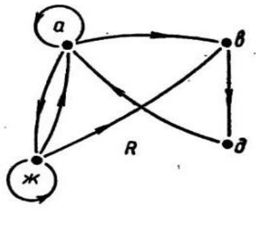


Рис.28

Значит, транзитивность отношения R на его графе отражается следующим образом: *если на графе есть цепь из двух ребер, то на графе есть и ее замыкающее ребро.*

На графе отношения равенства нет ни одной цепи из двух ребер. Поэтому можно сказать, что нет ни одной цепи из двух ребер без замыкающего ребра. Значит, верно высказывание: «Каждая цепь из двух ребер имеет на графе замыкающее ребро».

45. На рисунке 29 изображены графы четырех отношений. Какие из этих отношений транзитивны?

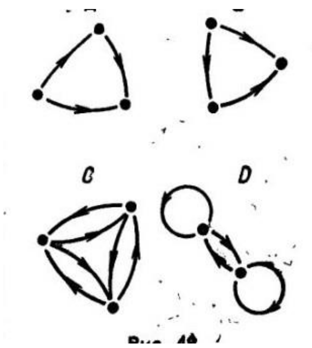


Рис. 29

46. Начертите граф отношения «кратно» на множестве { 15; 3; 5; 9}. Обладает ли это отношение свойством транзитивности?

47. Лена - дочь Анны Петровны и Анна Петровна - дочь Елены Васильевны. Транзитивно ли отношение «быть матерью» на множестве {Лена; Анна Петровна; Елена Васильевна}?

48. Какими из свойств (рефлексивность, симметричность и транзитивность) обладает отношение «быть взаимно простым» на множестве N?

3.3. Антисимметричность

Если отношение не является симметричным, то на его графе должно быть хоть одно одинарное ребро, не считая петель. Наряду с этим могут быть как петли, так и двойные ребра. Интересен случай, когда на графе отношения нет двойных ребер, а петель и одинарных ребер может быть сколько угодно. В таком случае говорят, что отношение обладает свойством антисимметричности.

Свойство антисимметричности отношения R на M заключается в следующем: если элемент x из множества M находится с другим неравным ему элементом y в отношении R, то y не находится с x в этом отношении. Например, отношение «быть делителем» на множестве N антисимметрично, так как, если некоторое число является делителем неравного ему другого числа, то другое число не может быть делителем первого (9 делитель 18, 9 $\neq$18, 18 не делитель 9). Отношение «быть вертикальным» на множестве углов плоскости не является антисимметричным.

Пусть отношение R на множестве{а; б; в; г} антисимметрично.

Это значит, что если некоторый элемент множества{а; б; в; г} находится в отношении R с другим неравным ему элементом, то другой элемент не может находиться с первым в этом отношении. Другими словами, *если на графе какое-то* *ребро соединяет две различные вершины, то эти вершины не могут соединяться другим ребром с противоположным направлением* (рис. 30); т. е. на графе антисимметричного отношения не может быть двойных ребер.

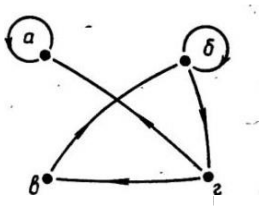


Рис.30

49. На рисунке 31 изображены графы четырех отношений. Какие из этих отношений антисимметричны?

Рис.31

50. Начертите граф отношения «меньше на 10» на множестве {70; 60; 50; 40; 30}. Обладает ли это отношение свойством антисимметричности?

51. В семье пятеро детей, и все мальчики. Является ли отношение «быть братом» на множестве этих детей: а) рефлексивным; б) симметричным; в) транзитивным; г) антисимметричным?

3.4. Монотонность

Рассмотрим отношение «кратно» на множестве N. Это отношение некоторым образом связано с операциями над натуральными числами, причем эти связи с разными операциями могут быть различными. Возьмем два натуральных числа, находящиеся в отношении «кратно», например 3 и 12: 12 кратно 3. Умножим каждое из этих чисел на какое-нибудь одно и то же натуральное число, например 2. Получим 6 и 24. Второе из этих чисел также находится в отношении «кратно» с первым числом, так как 24 кратно 6. Мы видим, что «умножение» пары натуральных чисел, принадлежащих отношению «кратно», дает пару натуральных чисел, принадлежащих тому же отношению. Это свойство отношения «кратно» называют монотонностью относительно умножения. Свойство монотонности отношения R на множестве M относительно операции T заключается в следующем. Если элемент x из M находится в отношении R с элементом y, то в результате выполнений операции T над элементами x и c, y и c первый из полученных элементов будет находиться в отношении R со вторым.

Мы уже показали, что отношение «кратно» на множестве натуральных чисел монотонно относительно умножения. Заметим, что это же отношение не монотонно относительно сложения. Действительно, если к числам 3и12 прибавить по 5, то получатся числа 8 и 17. Второе число не находится с первым в отношении «кратно».

52.Отношения «меньше на 1» и «больше на 1» рассматриваются на множестве {- 1; O; l}. Являются ли эти отношения монотонными относительно:

а) умножения; б) сложения?

53.Известно, что отношение «больше в 2 раза» на множестве является монотонным относительно умножения. Проверьте это утверждение для следующих пар (16; 8), (14; 7), (6; 3) и чисел 3 и 10.

54.Высказано утверждение о том, что отношение «меньше на 2» на множестве N монотонно относительно вычитания. Проверьте это утверждение для следующих пар (4; 6), (10; 12), (3; 5) и чисел 1, 3, 5.

55.Даны два высказывания: «Отношение «быть делителем» на множестве монотонно относительно умножения» и «Отношение «быть делителем» на множестве N монотонно относительно сложения». Подтвердите двумя примерами первое высказывание и опровергните второе.

Список литературы

1. Башмаков, А.В., Зуров, Е.В., Нырков, А.П. Дискретная математика. Методы кодирования и обработки дискретных структур данных: учебное пособие. – СПб.: СПГУВК, 2012. – 81 с.
2. Кривцова, И.Е., Лебедев, И.С., Настека, А.В. Основы дискретной математики. Часть 1. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 92 с.
3. Нефедов, В.Н., Осипова, В.А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Магадан, 2011. – 264 с.: ил.
4. Тишин, В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 352 с.