Министерство образования Оренбургской области
Государственное автономное профессиональное
образовательное учреждение
«Педагогический колледж» г.Бугуруслана

Методическое пособие по дисциплине «Информатика»
на тему

«Основы логики. Логические основы компьютера»

Составитель:
Е.В. Сергиенко

2019 г.

Литература для обучающихся

1. Афанасьева О.В. Логика: Учебное пособие для студентов средних профессиональных учебных заведений. М., 2002.
2. Бойко А.П. Логика: Учебное пособие для учащихся гимназий, лицеев и школ гуманитарного профиля. М., 1994.
3. Гетманова А.Д., Панов М.И., Уемов А.И., Никифоров А.Л., Бузук Г.Л. Логика: Учебное пособие для учащихся 10-11 классов. М., 1992.
4. Горский Д.П., Ивин А.А., Никифоров А.Л. Краткий словарь по логике. М., 1991.
5. Гусев Д.А. Краткий курс логики: Искусство правильного мышления. М., 2003.
6. Жоль К.К. Логика. Учебное пособие. – М.: Юнити-Дата, 2010, 399 с.
7. Ивин А.А. Логика: Учебное пособие. М., 1998.
8. Логика: Учебное пособие для общеобразовательных учебных заведений, школ и классов с углубленным изучением логики, лицеев и гимназий. М., 1995.
9. Поляков К.Ю., Шестаков А.П., Еремин Е.А. Логические основы компьютеров.//журнал Информатика, 2010, №12.
10. Яшин Б.Л. Задачи и упражнения по логике./Б.Л. Яшин – М.; Берлин: Директ-Медиа, 2017. – 251 с.

Содержание

Введение

Всегда было принято считать, что знание логики обязательно для образованного человека. Сейчас, в условиях коренного изменения характера человеческого труда, ценность такого знания возрастает. Свидетельство тому — растущее значение компьютерной грамотности, одной из теоретических основ которой является логика.

Логические операции — такие, как определение, классификация, доказательство, опровержение и т.п. — применяются каждым человеком в его мыслительной деятельности. Но применяются неосознанно и нередко с погрешностями, без отчетливого представления о всей глубине и сложности тех мыслительных действий, с которыми связан каждый, даже самый элементарный акт мышления.

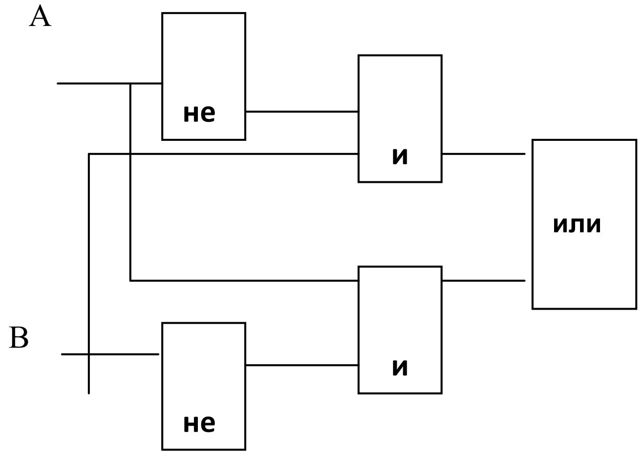
Законы мира, сущность предметов, общее между предметами и явлениями мы познаем посредством абстрактного мышления. Его необходимо развивать постоянно. Основными формами абстрактного мышления являются понятие, суждение, умозаключение.

Тема «Логика и компьютер» является актуальной при изучении всего курса информатики.

На уроках студенты знакомятся с основными логическими операциями, вводятся понятии эквивалентности и логического следования, в частности, выделяются такие понятия, как прямая и обратная теорема. Студенты учатся доказывать эквивалентность высказываний двумя методами: методом сравнений значений истинности и методом преобразования высказываний, а также записывать символически предложения с кванторами, переводить на привычный язык символические записи с кванторами, строить отрицание предложений с кванторами. Упражнения такого рода полезны не только для формирования математического мышления, математической культуры, но и лингвистической.

Важно, чтобы студенты имели представление о логическом устрой-

должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение. Значит, на выходе логической схемы должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов)



Задания для самостоятельного выполнения

1. Логическая схема имеет два входа X и Y. Определить логические функции, которые реализуются на её двух выходах.

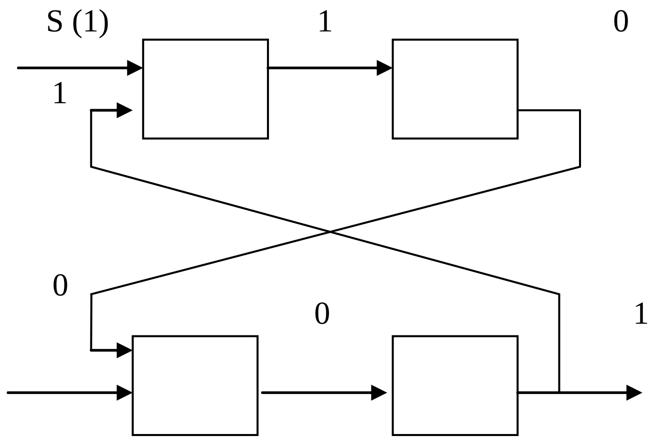
2. Проследить по логической схеме триггера, что происходит после поступления сигнала 1 на вход R (сброс).

3. Построить логическую схему одноразрядного двоичного сумматора.

подключается ко входу сумматора старшего разряда.

Триггер

Важнейшей структурной единицей оперативной памяти компьютера, а также внутренних регистров процессора является триггер. Это устройство позволяет запоминать, хранить и считывать информацию (каждый триггер может хранить 1 бит информации).
Триггер можно построить из двух логических элементов «или» и двух элементов «не».



В обычном состоянии на выходы триггера подан сигнал 0, и триггер хранит 0. Для записи 1 на вход S (установочный) подаётся сигнал 1. Последовательно рассмотрев прохождение сигнала по схеме, видим, что триггер переходит в это состояние, и будет устойчиво находиться в нём и после того, как сигнал на входе S исчезнет. Триггер запомнил 1, то есть с выхода триггера Q можно считать 1.
Для того чтобы сбросить информацию и подготовиться к приёму новой, подаётся сигнал 1 на вход R (сброс), после чего триггер возвратится к исходному «нулёвому» состоянию.

Пример По заданной логической функции $F(A,B)= B \wedge \overline{A} \vee \overline{B} \wedge A$ построить логическую схему.

Построение необходимо начать с логической операции, которая

стве компьютера, об устройствах элементной базы компьютера.

Особую роль играет умение студентами решать логические задачи. Решение логических задач позволяет повторить следующие темы:

1.Логика *(таблицы истинности, законы логики, преобразование логических выражений, способы решения логических задач).*

2.Этапы решения задач на ЭВМ *(для решения логических задач с помощью табличного процессора и языка программирования).*

3.Алгоритмизация и программирование *(составление алгоритма и программы на языке программирования решения логической задачи)*.

4.Технология обработки текстовой информации *{оформление решения логической задачи в текстовом процессоре).*

5.Технология обработки графической информации *(построение графического дерева, графа с помощью графического редактора).*

6.Технология обработки числовой информации *(решение логической задачи с помощью табличного процессора).*

7.Моделирование и формализация *{моделирование логических задач).*

В методическую разработку включены краткие теоретические сведения и задачи практически по всем вопросам темы «Логика и компьютер».

Материал может служить основой для проведения практических занятий, закрепления и углубления теоретических знаний и приобретения практических навыков по данной теме, а также для внеаудиторной самостоятельной работы студентов

Высказывания.
Простые и сложные высказывания

Умение правильно рассуждать необходимо в любой области человеческой деятельности: науке и технике, юстиции и дипломатии, планировании народного хозяйства и военном деле. Но, хотя это умение восходит к древнейшим временам, логика, то есть наука о том, какие формы рассуждений правильны, возникла лишь немногим более двух тысяч лет тому назад. Она была развита в IV веке до нашей эры в работах великого древнегреческого философа Аристотеля, его учеников и последователей.

Аристотель исследовал различные формы суждений и их комбинаций, ввёл понятие силлогизма, то есть рассуждения, в котором из заданных двух суждений выводится третье.

Например, « Все млекопитающие имеют скелеты. Все киты - млекопитающие, следовательно, все киты имеют скелет».

Если записать это в общем виде, получим:

«все А суть В; все В суть А; следовательно, все А суть С».

Логика, основанная на теории силлогизмов, называется классической.

Логика Аристотеля дополнялась, уточнялась и усовершенствовалась в течение многих веков.

В конце XVI века в алгебре словесная форма записи алгебраических выражений стала тормозить развитие науки, и чтобы облегчить выполнение алгебраических преобразований, была создана буквенная символика, позволяющая выполнять эти преобразования по строго определённым правилам. Точно также, чтобы облегчить проверку и преобразование сложных цепочек рассуждений, было создано буквенное исчисление. Оно получило название алгебры логики и математической логики.

Основы математической логики были заложены в XIX веке великим немецким математиком Г. Лейбницем (1646 – 1716). В середине XIX века ирландский математик и логик Джордж Буль (1815 – 1864) своими трудами положил начало формированию математиче-

имеет два входа. На один из входов надо подать результат логического сложения исходных величин А и В, то есть на него должен подаваться сигнал с элемента логического сложения «ИЛИ».

На второй вход требуется подать результат инвертированного логического умножения исходных сигналов ($A \wedge B$), то есть на второй вход должен подаваться сигнал с элемента «НЕ», на вход которого должен поступать сигнал с элемента логического умножения «И». Данная схема называется полусумматором, так как реализует суммирование одноразрядных двоичных чисел без учета переноса из младшего разряда.

Полный одноразрядный сумматор.

Полный одноразрядный сумматор должен иметь три входа: А,В – слагаемые и Ро – перенос из младшего разряда и два выхода: сумму S и перенос Р. Таблица сложения в этом случае будет иметь следующий вид:

Слагаемые		**Перенос из младшего разряда**	**Перенос**	**Сумма**
A	**B**	**Po**	**P**	**S**
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Логическое выражение для вычисления суммы в полном сумматоре принимает следующий вид:

$$S=(A \vee B \vee P_0) \wedge \overline{P_0} \vee (A \wedge B \wedge P_0)$$

Многоразрядный сумматор

Многоразрядный сумматор процессора состоит из полных одноразрядных сумматоров. На каждый разряд ставится одноразрядный сумматор, причем выход (перенос) сумматора младшего разряда сумматоры, которые как раз и обеспечивают такое сложение.

Полусумматор

При сложении двоичных чисел в каждом разряде образуется сумма и при этом возможен перенос в старший разряд. Обозначим слагаемые A и B, перенос P и сумму S. Таблица сложения одноразрядных двоичных чисел с учётом переноса в старший разряд выглядит так:

Слагаемые		Перенос	Сумма
A	**B**	**P**	**S**
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Из таблицы видно, что перенос реализуется с помощью логического умножения

$$P = A \wedge B$$

Сумма получается, если результат логического сложения умножить на инвертированный перенос:

$$S = (A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B})$$

Построим таблицу истинности для данного логического выражения

A	**B**	**A v B**	**A ∧B**	$\overline{A \wedge B}$	**$(A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B})$**
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Теперь на основе полученных логических выражений можно построить из базовых логических элементов схему сложения одноразрядных двоичных чисел.

По логической формуле переноса легко определить, что для получения переноса необходимо использовать логический элемент « И».

Анализ логической формулы для суммы показывает, что на выходе должен стоять элемент логического умножения « И», который

ской логики как научной дисциплины.

Основным понятием математической логики является высказывание.

Высказывание – это любое повествовательное предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

Предложение считается истинным, если то, о чём (о ком) говорится в предложении, соответствует действительности. Если же то, о чём (о ком) говорится, действительности не соответствует, это высказывание будет ложным.

Например, высказывания

A = {П.И.Чайковский – автор оперы «Евгений Онегин»}

и B = { 1<3} – высказывания истинные,

а высказывания C = {3 + 5 = 9} , D ={Могилёв - столица России} – ложны.

Обоснование истинности или ложности простых высказываний решается вне алгебры логики. Например, истинность или ложность высказывания “Сумма углов треугольника равна 180°” устанавливается геометрией, причём - в геометрии Евклида это высказывание является истинным, а в геометрии Лобачевского – ложным.

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, а ложному – 0.

Таким образом, A=1, B=1, C=0 и D=0.

Не всякое предложение является высказыванием.

Например, восклицательные и вопросительные предложения, определения высказываниями не являются. Предложение “$x^2 - 4x + 3 = 0$” также не будет высказыванием, но если взять конкретное значение x, то оно превратится в высказывание.

Предложение с переменной, которое при подстановке вместо переменной её значения становится высказыванием, называется высказывательной формой.

Все рассмотренные ранее высказывания были простыми. Из простых высказываний с помощью небольшого числа операций строятся сложные высказывания. Операции, называемые логическими связками, соответствуют союзам “не”, “или”, “а”, ”если, то” и т.д.

Например, высказывание “Сегодня в 4 часа я был в колледже, а в 6 часов я пошёл в секцию” состоит из двух частей: “ Сегодня в 4 часа я был в колледже ” и “Сегодня в 6 часов я пошёл в секцию ”, каждая из которых является высказыванием.

Высказывание, которое можно разложить на части, называют сложным, а неразложимое – простым.

Сложные высказывания также являются истинными или ложными. При этом истинность или ложность сложного высказывания зависит от истинности ли ложности простых высказываний.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Объясните, почему следующие предложения не являются высказываниями:
   а) Какого цвета этот дом?
   б) Число X не превосходит единицы.
   в) 4x + 3.
   г) Посмотрите в окно.
   д) Пейте томатный сок!
   е) Вы были в театре?
   ж) сумма чисел 5 и 7 равна 10.

2. Какие из следующих предложений являются истинными, а какие ложными высказываниями?
   а) Город Париж – столица Франции
   б) Число 2 является делителем числа 7.
   в) 3 + 5 = 24.
   г) 2 + 6 > 10
   д) Сканер – это устройство, которое может напечатать на бумаге то, что изображено на экране монитора.
   е) II + VI > VIII
   ж) Сумма чисел 2 и 6 больше числа 8.
   з) Мышка – устройство ввода информации.

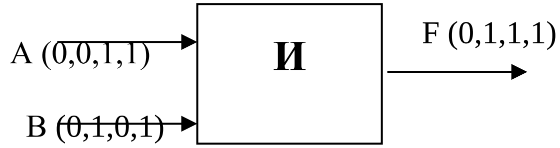
Приведите по два примера истинных и ложных высказываний из:

а) биологии г) истории
б) географии д) литературы

Логический элемент «И»

На входы A и B логического элемента подаются два сигнала (00, 01, 10 и 11).

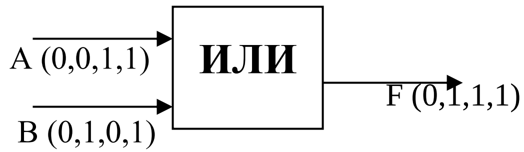
На выходе получается сигнал 0 или 1 в соответствии с таблицей истинности операции логического умножения.



Логический элемент «ИЛИ»

На входы A и B логического элемента подаются два сигнала (00, 01, 10 и 11).

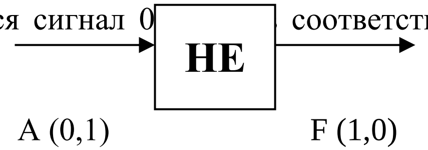
На выходе получается сигнал 0 или 1 в соответствии с таблицей истинности операции логического сложения.



Логический элемент «НЕ»

На входы A и B логического элемента подаётся сигнал 0 или 1.

На выходе получается сигнал 0 соответствии с таблицей истинности инверсии.



В целях максимального упрощения работы компьютера всё многообразие математических операций в процессоре сводится к сложению двоичных чисел. Поэтому главной частью процессора являются

13. В городе 5 друзей: Иванов, Петров, Сидоров, Гришин, Капустин. По профессии они: маляр, мельник, плотник, почтальон и парик махер. Известно,что:

1. Пётр и Гришин никогда не держали в руках молярные кисти.
2. Иванов и Гришин всё собираются пойти на мельницу, где работает их товарищ.
3. Петров и Капустин живут в одном доме с почтальоном.
4. Сидоров был недавно свидетелем на свадьбе у Петрова и дочки парикмахера.
5. Иванов и Петров каждое воскресение играют в городки с плотником и маляром.
6. Гришин и Капустин по субботам встречаются в парикмахерской, где работает их друг.
7. Почтальон предпочитает бриться сам.

Определите профессии каждого из друзей.

Логические основы компьютера

Базовые логические элементы реализуют три основные логические операции:

- Логический элемент «И» - логическое умножение
- Логический элемент «ИЛИ» - логическое сложение
- Логический элемент «НЕ» - инверсию

Так как любая логическая операция может быть представлена в виде комбинаций трёх основных, любые устройства компьютера, производящие обработку или хранение информации, могут быть собраны из базовых логических элементов, как из «кирпичиков».

Логические элементы компьютера оперируют с сигналами, представляющими собой электрические импульсы. Есть импульс – логический смысл сигнала – 1, нет импульса – 0.

На входы логического элемента поступают сигналы-значения аргументов, на выходе появляется сигнал – значение функции.

Преобразование сигнала логическим элементом задаётся таблицей состояния, которая является таблицей истинности, соответствующей логической функции.

Логические операции

Логическая операция <u>инверсия</u> (лат. inversion– переворачиваю):

- в естественном языке соответствует словам **«неверно, что ..»** и частице **не**
- обозначение: $\overline{A}$, $\neg$ A
- в языках программирования: not
- иное название: **отрицание**.

Отрицание – это логическая операция, которая каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Логическая операция <u>конъюнкция</u> (лат. conjunctio – связываю):

- в естественном языке соответствует союзу **и**
- обозначение: $\wedge$
- в языках программирования: and
- иное название: **логическое умножение**

Конъюнкция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

A	**B**	**A$\wedge$B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическая операция <u>дизъюнкция</u> (лат. disjunctio – различаю):

- в естественном языке соответствует союзу **или**

- обозначение: $\vee$
- в языках программирования or
- **иное название:** логическое сложение.

Дизъюнкция – это логическая операция, которая каждым двум простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

A	**B**	**A$\vee$B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическая операция <u>импликация</u> (лат. implicatio – тесно связываю):
- в естественном языке соответствует обороту **Если … то**
- обозначение:$\Rightarrow$, $\rightarrow$
- **иное название:** логическое следование

Импликация – это логическая операция, ставящая каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно**.**

A	**B**	**A$\rightarrow$B**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая операция <u>эквиваленция</u> (лат. equivalens -равноценное):
- в естественном языке соответствует обороту речи **тогда и только тогда**
- обозначение $\leftrightarrow$

г) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})$

д) $\overline{X} \vee X \wedge Y$

е) $(X \wedge Y) \vee \overline{\overline{X} \rightarrow Y}$

ж) $(A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{C} \wedge D) \vee (\overline{A \wedge D} \wedge \overline{C})$

з) $(\overline{A} \wedge C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{C} \wedge D) \vee (A \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge C \wedge D)$

9. Согласно инструкции капитан должен находиться на судне всегда, за исключением случаев, когда с судна выгружают груз. Если же груз не выгружают, то рулевой никогда не отсутствует, если не отсутствует и капитан.
   В каких случаях рулевой обязан присутствовать на судне?
10. Ответьте на вопросы:
    а) что можно утверждать о правильности двух рассуждений, ко торые в формализован- ном виде выглядят одинаково?
    б) что можно утверждать о заключении правильного по форме суждения, если все его посылки истинны?
    в) что можно сказать о рассуждении, все посылки которого истинны, а значение ложно?
11. Считая утверждение “В хоккей играют настоящие мужчины” и “Трус не играет в хоккей” соответственно посылкой и заключением правильного рассуждения, сформулируйте подразумеваемую посылку. Проверьте правильность полученного рассуждения.
12. В бутылке, кувшине, стакане и банке находится молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что**:**
    1. Вода и молоко не в бутылке
    2. Сосуд с лимонадом стоят между кувшином и сосудом с квасом
    3. В банке не лимонад и не вода
    4. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком.

Какая жидкость находится в каждом из сосудов?

	Молоко	Лимонад	Квас	Вода
Бутылка				
Кувшин				
Стакан				
Банка				

д) $(A \wedge B) \to (B \vee A)$

2. Докажите, что следующие выражения являются тавтологиями:
   а) $(\overline{A} \to A) \to A$
   б) $(\overline{A} \to 0) \to A$
   в) $(1 \to A) \to A$
   г) $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$
   д) $(A \wedge (A \to B)) \to B$
3. Докажите следующие эквивалентности:
   а) $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$
   б) $(A \vee B) \wedge A \Leftrightarrow A$
   в) $(A \vee B) \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge B$
   г) $(A \wedge B) \vee \overline{A} \Leftrightarrow B \vee \overline{A}$
   д) $\overline{X \wedge Y} \Leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$
4. Выбрать составное высказывание, имеющее ту же таблицу истинности, что и **не (не А и не (В и С)**.
   1. А или В или С и А
   2. (А или В) и (А или С)
   3. А и (В или С)
   4. А или (не В или не С)
   5. (А или В) и (А или С)
5. Упростить выражения:
   а) $(X \to Y) \to Y$
   б) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})$
   в) $\overline{X} \vee X \wedge Y$
   г)* $(X \wedge Y) \vee \overline{\overline{X} \to Y}$
6. Доказать, используя таблицы истинности, что логические выражения

   $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ и $A \wedge B$ равносильны.
7. Доказать справедливость законов де Моргана, используя таблицы истинности.
8. Упростить логические выражения:
   а) $(A \vee \overline{A}) \wedge B$
   б) $A \wedge (A \vee B) \wedge (B \vee \overline{B})$
   в) $(X \to Y) \to Y$

- **иное название:** равнозначность

Эквиваленция – это логическая операция, ставящая каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

A	**B**	**A↔B**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические операции имеют следующий приоритет: действия в скобках, инверсия, $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Пример. Определите истинность простых высказываний:

A={Принтер – устройство вывода информации},
B={Процессор – устройство хранения информации},
C={Монитор – устройство вывода информации},
D={Клавиатура – устройство обработки информации}.

Определите истинность составного высказывания: $(\overline{A} \wedge B) \wedge (C \vee D)$.

На основании знания устройств компьютера установим истинность простых высказываний: A=1, B=0, C=1, D=0.
На сновании таблиц истинности:

$$(\overline{1} \wedge \overline{0}) \wedge (1 \vee 0) = (0 \wedge 1) \wedge (1 \vee 0) = 0 \wedge 1 = 0$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Среди следующих высказываний укажите составные; выделите в них простые, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью логических операций каждое составное высказывание.
   1) Число 376 чётное и трёхзначное.
   2) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.

3) Земля имеет форму шара.
4) На уроке математики старшекурсники отвечали на вопросы учителя и писали самостоятельную работу.
5) Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3.
6) Число 15 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа 15 делится на 3.

2. Ниже приведена таблица, левая колонка которой содержит основные логические связки, с помощью которых в естественном языке строятся сложные высказывания. Заполните правую колонку таблицы соответствующими названиями логических операций.

В естественном языке	**В логике**
… и …	
… или …	
Неверно, что …	
… в том и только в том случае …	
… тогда и только тогда, когда …	
… не …	

3. Постройте отрицания следующих высказываний:
   1) Число 1 есть составное число.
   2) Натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, являются простыми числами.
   3) Неверно, что число 3 не является делителем числа 198.
   4) Неверно, что любое число, оканчивающееся цифрой 4, делится на 4.
   5) Некоторые млекопитающие не живут на суше.
4. Среди следующих высказываний найдите отрицание высказывания «Существуют простые четные числа»:
   а) Существуют простые нечётные числа
   б) Существуют чётные составные числа
   в) Любое простое число нечётно
   г) Не существует простых четных чисел
5. Среди следующих высказываний выделить конъюнкцию и дизъюнкцию и определить, истинны они или ложны:
   а) Число 27 кратно 3 и 9

12. $A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow 0$ – закон противоречия

13. $A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$ – закон исключения третьего

14. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$

15. $\overline{A \rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$

16. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \rightarrow \overline{A}$ - закон контрапозиции

Пример 1 Найдите X, если $\overline{X \vee A} \vee \overline{X \vee \overline{A}} = B$

Воспользуемся законом де Моргана для логического сложения и законом двойного отрицания:

$$(\overline{X} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{X} \wedge A) = \overline{X} \wedge (\overline{A} \vee A) = \overline{X} \wedge 1 = \overline{X} = B$$

Значит, X= $\overline{B}$

Пример 2. Упростить выражение $\overline{\overline{A \wedge B} \vee (B \wedge C)}$

По правилам отрицания дизъюнкции и конъюнкции, закону двойного отрицания имеем:

$$\overline{\overline{A \wedge B} \vee (B \wedge C)} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\overline{A \wedge B}} \wedge \overline{(B \wedge C)} \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \Leftrightarrow \left[(A \wedge B) \wedge \overline{B}\right] \vee \left[(A \wedge B) \wedge \overline{C}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\underbrace{A \wedge (\underbrace{B \wedge \overline{B}}_{0})}_{0}\right] \vee \left[(A \wedge B) \wedge \overline{C}\right] \Leftrightarrow 0 \vee \left[(A \wedge B) \wedge \overline{C}\right] \Leftrightarrow A \wedge B \wedge \overline{C}$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Построить таблицы истинности для следующих выражений:
   а) $A \vee (B \vee \overline{B} \rightarrow \overline{C})$
   б) $A \wedge (B \wedge \overline{B} \rightarrow \overline{C})$
   в) $A \vee (B \vee \overline{B}) \wedge A \vee (B \rightarrow C)$
   г) $(\overline{A} \rightarrow B) \vee (A \wedge B)$

$A \leftrightarrow B$. Эквивалентность является отношением между двумя составными высказываниями, состоящими в том, что их значения истинности всегда одни и те же.

Логические выражения А и В эквивалентны в том и только том случае, когда эквиваленция $A \leftrightarrow B$ истинна при всех значениях логических переменных.

Логические выражения, истинные при любых значениях истинности входящих в них переменных, называют <u>тавтологиями</u> (от греческого “tauto” – то же самое и “логос” – слово).

Логические законы и правила преобразования логических выражений

В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования логических выражений.

1. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ - закон коммутативности дизъюнкции
2. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ - закон коммутативности конъюнкции
3. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ - закон ассоциативности дизъюнкции
4. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ - закон ассоциативности конъюнкции
5. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

   - дистрибутивные законы
6. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

7. $1 \wedge A \Leftrightarrow A$

   $1 \vee A \Leftrightarrow 1$

   $0 \wedge A \Leftrightarrow 0$

   $0 \vee A \Leftrightarrow A$
8. $A \wedge A \Leftrightarrow A \vee A \Leftrightarrow A$ -законы идемпотентности
9. $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ – закон двойного отрицания
10. $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

    законы де Моргана
11. $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

б) $17 < 42 < 18$

в) треугольник АВС является остроугольным, или прямоугольным, или тупоугольным

г) $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$

д) $21 \geq 21$

6. Даны высказывания:

   A={Я купил велосипед}

   B={Я участвовал в соревнованиях по велоспорту}

   C={Я путешествовал по России}

Сформулируйте высказывания, соответствующие выражениям:

а) $A \wedge B$ в) $\overline{A} \wedge B$ д) $\overline{A \wedge B}$

б) $A \vee B$ г) $\overline{A} \vee B \vee \overline{C}$ е) $\overline{A} \vee \overline{C}$

7. Пользуясь высказываниями А, В и С, записанными в предыдущем упражнении, запишите следующие высказывания:
   а) Я не путешествовал по России
   б) Я купил велосипед, но не путешествовал по России
   в) Я путешествовал по России и не участвовал в соревнованиях
   г) Я не путешествовал по России и не участвовал в соревнованиях

Заполнить таблицу:

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Какой можно сделать вывод? Будут ли совпадать значения истинности для $\overline{X \vee Y}$ и $\overline{X} \wedge \overline{Y}$?

8. Найдите значения истинности логических выражений:
   а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$
   б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1)$
   в) $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$
   г) $(0 \wedge 1) \wedge 1$
   д) $1 \wedge (1 \wedge 1) \wedge 1)$

е) $((1\vee 0)\wedge(1\wedge 1))\wedge(0\vee 1)$

ж) $((1\wedge\overline{1})\vee 0)\wedge(0\vee\overline{1})$

9. В следующих составных высказываниях выделите составляющие их высказывания и укажите истинные импликации:

а) Если число 48 кратно 8, то оно кратно 4

б) Если –3 <-1, то 3^2=6

в) Если lg 100 = 10, то у собаки четыре ноги

г) Если 2·2=5, то существуют ведьмы

10 Даны два высказывания:

A = {Четырёхугольник MNPQ - параллелограмм}

B = {Диагонали MNPQ в точке пересечения делятся пополам}

Прочитайте следующие высказывания и установите, истинны они или ложны:

а) $A\to B$ в) $\overline{A}\to B$ д) $A\to\overline{B}$ ж) $\overline{B}\to\overline{A}$

б) $B\to A$ г) $\overline{B}\to A$ е) $\overline{A}\to\overline{B}$

Логические выражения и таблицы истинности

Таблицу, показывающую, какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний, называют таблицей истинности составного высказывания.

Составные высказывания в алгебре логики записываются с помощью логических выражений. Для любого логического выражения достаточно просто построить таблицу истинности.

Алгоритм построения таблицы истинности:

1. подсчитать количество переменных n в логическом выражении;
2. определить число строк в таблице $m=2^n$;
3. подсчитать количество логических операций в формуле;
4. установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов;
5. определить количество столбцов в таблице: число переменных + число операций;
6. выписать наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой натуральный ряд n-разрядных двоичных чисел от 0 до 2^n-1;
7. провести заполнение таблицы истинности по столбикам,

выполняя логические операции в соответствии с установленной в п.4 последовательностью.

<u>Пример:</u> Построить таблицу истинности для выражения:

$$A\wedge(B\vee\overline{B}\wedge\overline{C})$$

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B}\wedge\overline{C}$	$B\vee(\overline{B}\wedge\overline{C})$	$A\wedge(B\vee\overline{B}\wedge\overline{C})$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Может случиться, что для двух внешне различных логических выражений таблицы истинности одинаковы. Например, составим таблицы истинности для выражений $\overline{A}\vee B$ и $A\to B$.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}\vee B$	$A\to B$.
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Последние два столбца здесь совпадают. Это значит, что $\overline{A}\vee B$ и $A\to B$ не отличаются друг от друга, хотя их форма различна, но при всех значениях входящих в них переменных выражения получают одинаковые значения. Такие выражения называют **логически эквивалентными** и пишут: $(\overline{A}\vee B)\Leftrightarrow A\to B$.

Отметим разницу между эквиваленцией и эквивалентностью. Эквиваленция является логической операцией, позволяющей по двум данным высказываниям A и B построить новое высказывание